Hermite 多項式展開の非線型動力学への応用

九大理　　藤坂　博一，森　　　肇

（11月12日受理）

§1. 序　　論

最近，臨界現象の理論は急速な発展をとげつつあり，未だ完成していないとは言え，その本質にせまりつつある。さしあたり，静力学，動力学に共通していえることは非線型項がどのような役割を持ち，どのようにつめて行くかを明確にすることであろう。

静的問題に関しては，くりこみ群の理論[(1)]が展開され，種々の新しい結果を導くと共に，新しい方法論を提起している。くりこみ群は，4次元より低い次元では短波長モードを消去した effective Hamiltonian の4次或いはそれ以上の非線型項の存在が重要であることを示している。この場合には幸に，非線型の強さを示す展開パラメータが発見されている為に，単純な摂動展開が使えるという利点がある。

一方，動的問題における非線型性の問題は mode - coupling 理論として発達し，重要な成果をもたらしている。特に，一般化された Brown 運動の理論[(3)]に基づく川崎理論は，最初Mori によって得られた線型運動方程式を，二次の非線型項がある場合に拡張し，実験とよく比較できる結果を得ている。しかし，くりこみ群の場合と違って，非線型の展開パラメータが発見されていない為に論理的にはすっきりしないということはある。mode - coupling 理論によると，非線型項は輸送係数に余分の寄与[(2),(4),(5)]をなすということが知られている。

この小稿では，以前に射影演算子の方法で厳密に定式化された非線型 Langevin 方程式[(4)]の多次元Hermite 多項式展開を試みる。Hermite 多項式は乱流理論[(5)]ではひんぱんに用いられるところであるが，動力学では未だ用いられておらず，わずかに Zwanzig[(6)]の示唆と Kawasaki の formal theory があるだけである。射影演算子の方法による Langevin 方程式[(4)]はデルタ関数を通じて巨視状態変数依存性をもつので，そのままでは coupling の強さ，波数依存性などはわからない。Hermite 多項式は完全系をなすのでデルタ関数をこの完全系で展開すると，explicitに Langevin 方程式の非線型を求めることが出来る。

§2.では射影演算子の方法による非線型 Langevin 方程式がまとめられており，§3.では多次元Hermite 多項式の定義とその性質および Langevin 方程式の展開が述べられる。§4.では，Hermite 多項式の応用がいくつか行なわれ，§5.は結びにあてられている。

§ 2.　揺ぎのL型運動方程式[3),(4)]と非線型 Langevin 方程式[4)]

時間推進が

$$\frac{d}{dt}A_\mu(t) = iLA_\mu(t) \;, \qquad (2\cdot1)$$

で与えられる力学量 $\{A_\mu(t)\}$ の運動を考えよう。 iL は時間に依存しなければ何でもよい。又， $t=0$ において,

$$< A_\mu(0)\, A_\nu^*(0) > = < |A_\mu(0)|^2 > \delta_{\mu\nu} \qquad (2\cdot2)$$

と直交化されているとする。(2•1)はMori によって示されたように，一般化された Brown 運動型の方程式,

$$\frac{d}{dt}A_\mu(t) = \sum_\nu i\Omega_{\mu\nu}A_\nu(t) - \sum_\nu \int_0^t ds\,\Phi_{\mu\nu}(s)A_\nu(t-s) + F_\mu(t) \;, \qquad (2\cdot3)$$

の型に書き変えることができる。ここで,

$$i\Omega_{\mu\nu} \equiv < A_\nu^*(o)\, iLA_\mu(o) > / < |A_\nu|^2 > \;, \qquad (2\cdot4\cdot1)$$

$$\Phi_{\mu\nu}(t) = -< A_\nu^*(o)\, iLF_\mu(t) > / < |A_\nu|^2 > \;, \qquad (2\cdot4\cdot2)$$

$$F_\mu(t) = \exp[\, t(1-P)\, iL\,](1-P)\, iLA_\mu(o) \;, \qquad (2\cdot4\cdot3)$$

である。 PGは $\{A_\mu(o)\}$ の線型な組で張られる部分空間へのGの射影,

$$PG = \sum_\mu \frac{< GA_\mu^*(o) >}{< |A_\mu|^2 >} A_\mu(o) \;, \qquad (2\cdot5)$$

を表わす。Pについては $P=P^2$ が成立するので (2•4•3) より明らかに,

$$< A_\mu^*(o) F_\nu(t) > = 0 \qquad (2\cdot6)$$

が成立する。(2•3)式は $A_\mu(t)$ が量子力学量であっても内積の定義を拡張すれば成立する。運動方程式 (2•3)の特徴は exact な式であること, systematic part が $A_\mu(t)$ につい

て線型であることである。これを仮りにL型運動方程式とよぶことにしよう。

今，μとしてマクロな運動を記述する波数 $k(|k|<k_c)$ をとろう。この場合は(2・3)は，

$$\frac{d}{dt}A_k(t)=\sum_l i\omega_{kl}A_l(t)-\sum_l\int_0^t ds\,\varphi_{kl}(t-s)A_l(s)+f_k(t), \qquad (2\cdot7)$$

となり，

$$i\omega_{kl}=\langle A_l^*(o)\,iLA_k(o)\rangle/\langle|A_l|^2\rangle, \qquad (2\cdot8\cdot1)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{kl}(t)&=-\langle A_l^*(o)\,iLf_k(t)\rangle/\langle|A_l|^2\rangle,\\&=\langle f_k(t)\,f_l^*(o)\rangle/\langle|A_l|^2\rangle,\end{aligned} \qquad (2\cdot8\cdot2)$$

$$f_k(t)=\exp[t(1-P)iL](1-P)iLA_k(o), \qquad (2\cdot8\cdot3)$$

で与えられる。LはLiouville演算子である。(2・7)はマクロな量の揺ぎのL型運動方程式を与え，記憶関数 $\varphi_{kl}(t)$ のFourier変換 $\varphi_{kl}(i\omega)$ は線型輸送係数を与える。今までは{A(o)}の線型な組で張られる部分空間への射影のみを考えてきた。実はこのことがL型方程式(2・3)，(2・7)が得られる原因となったわけであるが，これを拡張して{A(o)}の非線型な組で張られる部分空間へも射影することを考えて，演算子(2・5)の代りに，

$$\begin{aligned}\mathscr{P}G&=\sum_l\xi_l(G)A_l(o)+\sum_{l_1}\sum_{l_2}\xi_{l_1l_2}(G)[A_{l_1}(o)A_{l_2}(o)-\langle A_{l_1}(o)A_{l_2}(o)\rangle]+\cdots,\\&\equiv\langle G;A(o)\rangle,\end{aligned} \qquad (2\cdot9)$$

で演算子$\mathscr{P}$を定義しよう。この$\mathscr{P}$は最初Zwanzig[(7)]によって導入されたものである。また角括弧は，

$$\langle G;a\rangle=\langle G\delta(a-A(o))\rangle/w(a), \qquad (2\cdot10)$$

$$w(a) \equiv < \delta(a-\Lambda(o)) > = \int dx\, \rho(x)\, \delta(a-\Lambda(x)) \quad , \tag{2・11}$$

を表わす。この$\mathscr{P}$を用いて，別の型の $\Lambda_k(t)$ に対する運動方程式を得ることができる。

(2・1) の $\Lambda_\mu(t)$として，マクロな力学量 $\Lambda_k(t)$ が a_k をとる分布

$$g_a(t) \equiv \delta(\Lambda(t)-a) = \prod_{|k|<k_c} \delta(\Lambda_k(t)-a_k) \quad , \tag{2・12}$$

を考えよう。 $g_a(t)$の時間推進の演算子は iL で与えられることを考慮すると (2・3) は，

$$\frac{\partial}{\partial t} g_a(t) = M_a\, g_a(t) + F_a(t) \quad , \tag{2・13}$$

と書ける。ここで，

$$M_a g_a(t) = -\sum_k \frac{\partial}{\partial a_k} [\, v_k(a)\, g_a(t)]$$

$$+ \int db \int_0^t ds < iLF_a(s)\, ;\, b > g_b(t-s) \quad , \tag{2・14}$$

$$v_k(a) \equiv < iL\Lambda_k(o)\, ;\, a > \quad , \tag{2・15・1}$$

$$F_a(t) \doteqdot -\sum_k \frac{\partial}{\partial a_k} [\, R_k(t)\, \delta(a-\Lambda(o))] \quad , \tag{2・15・2}$$

$$R_k(t) \equiv \exp[\, t(1-P)\, iL]\, (1-P)\, iL\Lambda_k(o) \quad , \tag{2・15・3}$$

である。(2・15・2) を得るのに Fokker-Planck 近似[8]

$$\exp[\, t(1-P)\, iL] \{ R_k(o)\, \delta(a-\Lambda(o)) \}$$

$$\doteqdot R_k(t)\, \delta(a-\Lambda(o)) \quad ,$$

を用いた。(2・13) に a_k をかけ a で積分すると，

$$\Lambda_k(t) = \int da\, a_k\, g_a(t) \quad ,$$

を用いて，

$$\frac{d}{dt}A_k(t) = v_k(A(t)) + C_k(A(t)) + R_k(t) \quad , \tag{2•16}$$

を得る。ここに，

$$C_k(A(t)) \equiv \int_0^t ds < iLR_k(s)\,;A(t-s)> \quad 。 \tag{2•17}$$

(2•16) を非線型 Langevin 方程式とよぶ。揺動力 $F_a(t)$，$R_k(t)$ は，

$$< F_a(t)\,;\,b> = < R_k(t)\,;\,a> = 0 \quad ,$$

を満足する。今，マクロな変数とミクロの変数の時間的な分離が十分に行なえると仮定すると，(2•14) および (2•17) は Markov 化できて，

$$\begin{aligned} M_a g_a(t) \doteqdot & -\sum_k \frac{\partial}{\partial a_k}[\,v_k(a)\,g_a(t)] \\ & +\sum_k\sum_l \frac{\partial}{\partial a_k}[\,w(a)\,\gamma_{kl}(a)\,\frac{\partial}{\partial a_l^*}\{\frac{1}{w(a)}\,g_a(t)\}] \quad , \end{aligned} \tag{2•18•1}$$

$$C_k(a) \doteqdot \sum_l \frac{1}{w(a)}\,\frac{\partial}{\partial a_l^*}[\,w(a)\,\gamma_{kl}(a)] \quad , \tag{2•18•2}$$

を得る。この Markov 化は気体および液体では運動量空間における緩和過程と座標空間における緩和過程の二つの time scale がある為に正当化されるがスピン系（特に total spin が保存されない場合）に対しては問題となる。(2•18•2) において，

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}(a) &= \int_0^\infty ds < R_k(s)\,R_l^*(o)\,;\,a> \quad , \\ &= \gamma_{kl}^0 + \triangle\,\gamma_{kl}(a) \quad , \end{aligned} \tag{2•19}$$

であり，γ_{kl}^0 は Onsager の係数であり，a 依存性はない。Fokker-Planck 演算子 Ma の自己共役な演算子 Λ_a を，

$$\int ds\, f_1(a)\,M_a\,f_2(a) = \int da[\,\Lambda_a\,f_1(a)]\,f_2(a) \quad , \tag{2•20}$$

で定義すると，(2•18•1) より，

$$\Lambda_a = \sum_k \{ v_k(a) + C_k(a) \} \frac{\partial}{\partial a_k} + \sum_k \sum_l \gamma_{kl}(a) \frac{\partial}{\partial a_l^*} \frac{\partial}{\partial a_k} \quad , \qquad (2\cdot21)$$

を得る。 $a_k(t) = \exp(t\Lambda_a) a_k$ で定義された新しい量 $a_k(t)$ の運動方程式はこの節の始めに述べた方法でL型運動方程式の形に書ける。この方程式の揺動力を $q_k(t)$ とすると，(2•4•3) より，

$$q_k(t) = \exp[\, t(1-\mathscr{P}_a)\Lambda_a] (1-\mathscr{P}_a)\Lambda_a a_k \quad , \qquad (2\cdot22)$$

である。ここで，$\mathscr{P}_a$ は $\{a\}$ の線型空間への射影演算，

$$\mathscr{P}_a f(a) = \sum_l \frac{\langle f(a) a_l^* \rangle}{\langle |a_l|^2 \rangle} a_l \quad ,$$

$$\langle G(a) \rangle = \int da\, w(a) G(a) \quad ,$$

を表わす。又，(2•21) より，

$$q_k(o) \equiv (1-\mathscr{P}_a)\Lambda_a a_k = v_k'(a) + C_k'(a) \quad , \qquad (2\cdot23)$$

$$v_k'(a) = (1-\mathscr{P}_a) v_k(a)$$

$$C_k'(a) = (1-\mathscr{P}_a) C_k(a)$$

となる。四種の揺動力 (2•7)，(2•15•2)，(2•15•3)，(2•22) の間には一般的に，

$$f_k(t) = R_k(t) + \int da\, q_k(t)\, \delta(a-A(o)) + \int da \int_0^t ds\, q_k(s) F_a(t-s) \quad , \qquad (2\cdot24)$$

なる関係がある。この式は Markov 化の条件より，ミクロな時間 τ_c の後についてのみ成立する。つまり τ_c より前では系はまだ力学的（可逆的）な運動が支配的であり，散逸項 $C_k(a)$ は運動に関係しないからである。特に， $t=0$ に対しては，揺動力間の関係式

として，

$$f_k(o)=R_k(o)+\int da\, v_k'(a)\,\delta(a-A(o)) \quad , \tag{2・25}$$

がある。(2・24)，(2・25) を用いてＬ型運動方程式の記憶関数は，

$$\varphi_{kl}(t)=\frac{2\gamma^0_{kl}}{<|A_l|^2>}\quad \delta(t)+\psi_{kl}(t) \quad , \tag{2・26}$$

と書ける。ここで，

$$\psi_{kl}(t)=<\tilde{q}^*_l(o)\exp[\,t(1-\mathscr{P}_a)\Lambda_a]\,q_k(o)>/<|a_l|^2> \quad , \tag{2・27}$$

$$\tilde{q}_l(o)=-(1-\mathscr{P}_a)\frac{1}{w(a)}M_a(a_l w(a)) \quad ,$$

$$=v_l'(a)-C_l'(a) \quad , \tag{2・28}$$

である。$\tilde{q}_l(o)$ を求めるときに Fokker - Planck 近似を用いた。(2・26) は Onsager のbare　な記憶関数へのマクロな変数間の coupling によるくりこみ項を表わす。$v_k'(a)$，$C_k'(a)$ は a の線型空間への射影をさし引いたものであるから，もちろん a について非線型項から成る。(2・27) をまともに計算しようとするときには，$v_k'(a)$，$c_k'(a)$ の a 依存性がどのようであるかを調べる必要がある。我々は次の節で，explicitな a 依存性を見い出す為に多次元Hermite多項式を導びこう。

§ 3.　多次元Hermite多項式 (MDHP)

乱流理論[5]においては，Wiener - Hermite　多項式はひんぱんに用いられるところであるが，不可逆過程の統計力学，動的臨界現象に用いられることは未だ試みられていない。最近，Zwanzig, Kawasaki[6] がこのことに関して示唆している。この節では§ 4 の応用に必要な多次元Hermite多項式 (Multi - Dimensional Hermite Polynomial) の定義及びその性質を述べる。

(2・11) で定義される分布関数 w(a) を考えよう。$\rho(x)$ は平衡集団であるので，w(a) を求める問題は本質的には静的なものである。w(a) は物理的には初期時刻にマクロな力学量 A(o) が a なる値をとる空間の体積，あるいはそういう空間での分配関数

と見なせる。Wilson[1]の流儀にならって短波長モードから波数 k_c のところまで積分して了ったとする。この段階においては，

$$w(a) \propto \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k<k_c} u_2(k)\, a_k a_k^* - \sum_{k_1,}\cdots\sum_{\cdots,k_4<k_c} \Omega(k_1,\cdots,k_4)\, a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}a_{k_4} + \cdots\Big] \quad , \qquad (3\cdot1)$$

と書けるだろう。スピン系の場合には $u_2(k)$ は a_kに対する適当なスケーリングをすることによって，

$$u_2(k) = k^2 + \text{const.} + O(k^4) \quad , \qquad (3\cdot2)$$

と書ける[1]。(3・1) を

$$w(a) = c\,w_0(a)\,w'(a) \quad , \qquad (3\cdot3)$$

と書く。ここで，

$$w_0(a) \propto \exp[Q_0(a)] \quad , \quad \int da\, w_0(a) = 1 \quad , \qquad (3\cdot4\cdot1)$$

$$w'(a) = \exp[Q'(a)] \quad , \qquad (3\cdot4\cdot2)$$

$$c = \int da \exp[Q_0(a)] / \int da \exp[Q_0(a) + Q'(a)] \quad , \qquad (3\cdot4\cdot3)$$

$$Q_0(a) = -\frac{1}{2}\sum_{k<k_c} u_2(k)\, a_k a_k^* \quad , \qquad (3\cdot4\cdot4)$$

$$Q'(a) = -\sum_{k_1,}\cdots\sum_{\cdots,k_4<k_c} \Omega(k_1,\cdots,k_4)\, a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}a_{k_4} \quad , \qquad (3\cdot4\cdot5)$$

である。

n 次の MDHP を次式で定義しよう。

$$H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n}) \equiv (-1)^n [w_0(a)]^{-1} \frac{\partial}{\partial a_{p_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial a_{p_n}} w_0(a) . \qquad (3\cdot5)$$

例えば，

$$H_0 = 1$$

$$H_1(a_p)=u_2(p)\,a_p^* \qquad (3\cdot5\cdot1)$$

$$H_2(a_{p_1}a_{p_2})=u_2(p_1)u_2(p_2)\,a_{p_1}^*a_{p_2}^*-\delta(p_1+p_2)u_2(p_1) \quad ,$$

$$\vdots$$

となる。(3•5)は母関数

$$G(a,b)=[w_0(a)]^{-1}w_0(a-b) \quad , \qquad (3\cdot6)$$

のbについてのベキ展開の展開係数として与えられる。漸化式は演算子 $\alpha_p^+(a)$, $\alpha_p(a)$ を用いて次のように書ける。

$$\text{第一漸化式：}\ \alpha_p^+(a)H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})=H_{n+1}(a_{p_1}\cdots a_{p_n}a_p) \quad , \qquad (3\cdot7\cdot1)$$

$$\text{第二漸化式：}\ \alpha_p(a)H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\delta(p-p_i)H_{n-1}(a_{p_1}\cdots a_{p_{i-1}}a_{p_{i+1}}\cdots a_{p_n}) \quad , \qquad (3\cdot7\cdot2)$$

ここで,

$$\alpha_p^+(a)=-u_2(p)\,a_p^*-\frac{\partial}{\partial a_p} \quad , \qquad (3\cdot8\cdot1)$$

$$\alpha_p(a)=\frac{1}{u_2(p)}\frac{\partial}{\partial a_p} \qquad (3\cdot8\cdot2)$$

これらの演算子は容易に証明されるように,

$$[\alpha_p(a)\,,\,\alpha_{p'}^+(a')]=\delta(a-a')\delta(p-p') \quad , \qquad (3\cdot9\cdot1)$$

$$[\alpha_p(a)\,,\,\alpha_{p'}(a')]=[\alpha_p^+(a)\,,\,\alpha_{p'}^+(a')]=0 \quad , \qquad (3\cdot9\cdot2)$$

なる Bose 型の交換関係を満す。又, n 次の MDHP は固有値方程式,

$$\alpha_p^+(a)\,\alpha_p(a)H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})$$

$$=\lambda_n(p;p_1\cdots,p_n)H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n}) \quad , \qquad (3\cdot10)$$

を満足する。ここに，

$$\lambda_n(p\,;p_1\cdots p_n)\equiv\delta(p-p_1)+\delta(p-p_2)+\cdots+\delta(p-p_n)\,. \quad (3\cdot11)$$

上に見たように演算子 $\alpha_p^+(a)$，$\alpha_p(a)$ はそれぞれ p モードに対する生成，消滅演算子とみなされる。従って一般の MDHP 状態は，〝真空状態〟を $|0>$ として，

$$H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})=\alpha_{p_1}^+(a)\alpha_{p_2}^+(a)\cdots\alpha_{p_n}^+(a)\,|\,0> \ , \quad (3\cdot12)$$

と書ける。(3・12) はベクトル的に書いたが実際の計算では $|0>=1$ としてやればよい。$\alpha_p^+(a)\alpha_p(a)$ は p モードの〝粒子数〟演算子であり，$\lambda_n(p\,;p_1\cdots p_n)$ は p モードの〝個数〟とみることができる。

(A)　直交性

初期時刻での力学量 A(o) の関数 F(A(o)) の集団平均は，

$$\begin{aligned}<F(A(o))>&=\int da\,F(a)<\delta(a-A(o))> \ ,\\ &=\int da\,F(a)w(a) \ ,\\ &\equiv<F(a)> \ . \qquad (3\cdot13)\end{aligned}$$

ここに，第三式の角括弧は，重み w(a) をかけて a で積分したものであるが，混乱はないので集団平均と同じ記号を用いた。

今，w(a) の Gaussianの部分 $w_0(a)$ による平均を $<\cdots>_0$ としるそう。この平均のもとでMDHP の直交性

$$\begin{aligned}&<H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})H^*_{n'}(a_{p_1'}\cdots a_{p_{n'}'})>_0\\ &=c_n\delta_{nn'}\delta(\{p\}-\{p'\})\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i) \ , \qquad (3\cdot14)\end{aligned}$$

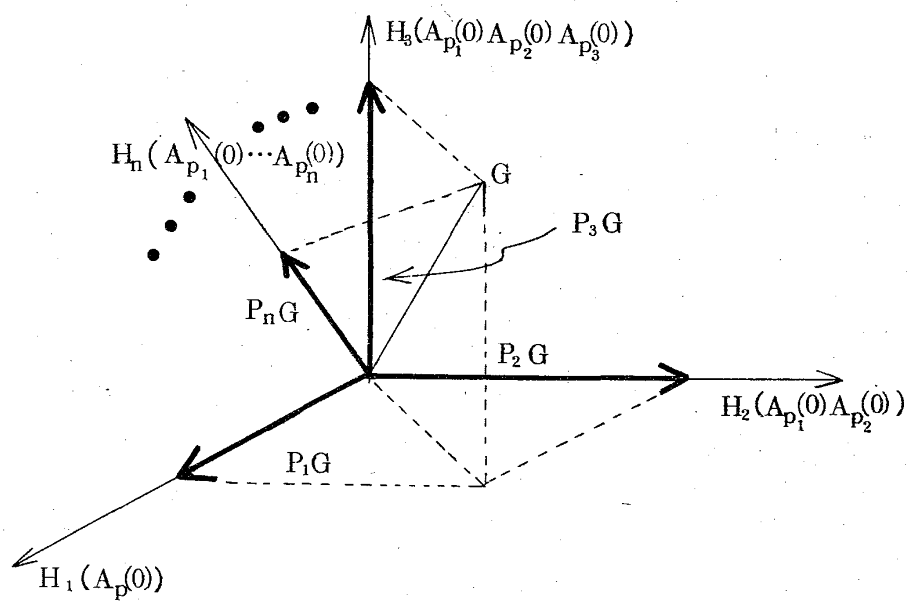
は，第二漸化式(3・7・2)を用いると容易に証明できる。ここで $\delta_{nn'}$ は通常の Kronecker のデルタである。$\delta(\{p\}-\{p'\})$ は，任意の p_i が p_j' にすべて対応して等しくなるとき 1 となる関数であり，c_n はそのときの場合の数である。この直交性を用いて $\delta(a-A(o))$ を次のように展開できる。

$$\delta(a-A(o))/w_0(a) \tag{3・15}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}\left[\frac{H_n^*(a_{p_1}\cdots a_{p_n})}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}\right]H_n(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o))\text{ 。}$$

上式を用いると Zwanzig の射影演算子$\mathscr{P}$は物理的には次のように考えることができる。今，簡単の為に $w(a)=w_0(a)$ としよう。$\{A(o)\}$ の線型，非線型項及びその他の自由度で張られる空間を考える。$\{A(o)\}$ の非線型項で張られる空間は互いに直交していて，各々の線型および非線型空間はMDHP $H_n(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o))$ なる固有ベクトル（規格化はされていない）で特徴づけられる。演算子P は $\{A(o)\}$ の線型空間への射影を表わす[3] ものだったが，$\mathscr{P}$は，$\{A(o)\}$ の線型及び非線型空間への射影を行なう演算子であると解釈できる。従って，$H_1(A_p(o))$への射影演算は通常のMori の演算子P で二次，三次，… の Hermite多項式で張られる空間への射影演算をそれぞれ P_2, P_3, で表わすと，

$$\mathscr{P}=P_1+P_2+P_3+\cdots\quad,\qquad(P_1=P)$$

なる関係が成立している。図式的には次のように書ける。



ここに，

$$P_nG=\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}\left[\frac{\langle GH_n^*(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o)\rangle}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}\right]H_n(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o)\ ,$$

である。上では w(a) が Gaussianの場合を考えたが， w(a) がGaussian からずれると，P_1，P_2 ，･･･ は直交しなくなる。しかし原理的には Schmidt の方法で w(a) に関する平均で直交する組をとることはできる。

(B) 非線型 Langevin 方程式の MDHP 展開前節の終りに述べたようにL型方程式の記憶関数へのマクロなモードの coupling によるくりこみ項を具体的に計算するには，streaming velocity $v_k(a)$，dissipative term $C_k(a)$ の非線型項の explicitな a 依存性が必要であった。ここではそれを具体的に求める。(3･15) を $v_k(a)$ の表式 (2･15･1) に代入し，平衡集団として正準集団をとると，

$$v_k(a)=\frac{1}{w(a)\beta}\langle\{A_k(o)\ ,\delta(a-A(o))\}\rangle\quad ,$$

$$=\frac{1}{\beta c w'(a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}\frac{\langle\{A_k(o)\ ,H_n(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o))\}\rangle}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}$$

$$\times H_n^*(a_{p_1}\cdots a_{p_n})\quad , \tag{3･16}$$

を得る。ここでβは熱浴の温度T の逆数を Boltzman 定数で割ったものであり，{ , }は Poisson 括弧を表わす。$w'(a)$は (3･4･2)で与えられ， w(a) の Gaussian からのずれを表わし， c は w(a)，$w_0(a)$ の規格化条件から出てくる因子であり， (3･4･3)で与えられる。このようにして， Streaming velocity の a 依存性はすべてぬき出すことができたが，実際に (3･16) の展開のすべてがT_c近傍で同じオーダーで寄与するか否かは明確ではない。スピン系では 3 次以上の MDHP からの寄与は小さいことが交換関係から予測[4]されている。一般的には，Wilson 的な意味での irrelevant variables を含んでいる可能性がある。実際， Kinetic Ising Model の dissipative term の非線型項は上のような理由で w(a) がGaussian のときは 0 となる[9]。

w(a) がGaussianだとしよう。 $u_2(p)\rightarrow\beta/\chi_p$ とおく。 χ_p は susceptibility である。(3･16) の展開を二次までとり， MDHP に (3･5･1) の表式を代入すると，

$$v_k(a)=\sum_p \frac{<\{A_k\ ,A_p^*\}>}{\chi_p}\ a_q$$

$$+\frac{1}{2}\sum_p\sum_{p'}<\{A_k\ ,A_{p'}^*A_p^*\}>[\beta\frac{a_p a_{p'}}{\chi_p\chi_{p'}}-\beta^2\frac{\delta(p+p')}{\chi_p}]\quad ,(3\cdot 17)$$

となる。第一項は集団振動の項(2•8)を与える。第二項に対しては波数保存則を考慮し，k＝0 の場合を考えると，

$$v_k(a)=i\omega_k a_k+\frac{i}{2}\sum_p \lambda_{kp}a_p a_{k-p}\quad ,\qquad (3\cdot 18)$$

$$\lambda_{kp}\equiv\frac{1}{i}<\{A_k\ ,A_{p-k}A_{-p}\}>kT\,\chi_p\chi_{k-p}\quad ,$$

を得る。これは，Kawasaki[(2)] が mode coupling 理論を用いた streaming velocity と一致する。

散逸項についても同様に議論できる。(3•15) を (2•19) に代入して，

$$\gamma_{kq}(a)=\frac{1}{cw'(a)}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}[\frac{H_n^*(a_{p_1}\cdots a_{p_n})}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}]\gamma_{kq}^{p_1\cdots p_n}\ ,\quad (3\cdot 19)$$

ここに，

$$\gamma_{kq}^{p_1\cdots p_n}\equiv\int_0^\infty ds<R_k(s)R_q^*(o)H_n(A_{p_1}(o)\cdots A_{p_n}(o))>\quad ,$$

である。(3•19) を用いると $C_k(a)$ は

$$C_k(a)=-\sum_q \gamma_{kq}^{0}a_q+\triangle C_k(a)\quad ,\qquad (3\cdot 20)$$

$$\triangle C_k(a)=-\sum_q u_2(q)\,a_q\frac{1}{cw'(a)}\sum_{n=1}\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}[\frac{H_n^*(a_{p_1}\cdots a_{p_n})}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}\times\gamma_{kq}^{p_1\cdots p_n}$$

$$+\frac{1}{cw'(a)}\sum_q u_2(q)\sum_{n=1}\frac{1}{n!}\sum_{p_1}\cdots\sum_{p_n}\frac{\gamma_{kq}^{p_1\cdots p_n}}{\prod_{i=1}^{n}u_2(p_i)}\sum_{j=1}^{n}\delta(q+p_i)$$

$$\times H_{n-1}^*(a_{p_1}\cdots a_{p_{i-1}}a_{p_{i+1}}\cdots a_{p_n})\quad ,\qquad (3\cdot 21)$$

と書ける。(3･20)の第一項はOnsagerの linear dissipation を表わす。

(C)　固有値方程式

簡単の為にT_cより上を考えると特性振動数は$\omega_{kq}=0$である。§ 2.で導入したFokker-Planck演算子M_aの自己共役な演算子Λ_a(2･20)を

$$\Lambda_a=\overset{0}{\Lambda}_a+\triangle\Lambda_a \quad , \tag{3･22}$$

$$\overset{0}{\Lambda}_a=-\sum_k \overset{0}{\gamma}_k a_k\frac{\partial}{\partial a_k}-\sum_k\overset{0}{\gamma}_k\frac{\partial}{\partial a_k^*}\frac{\partial}{\partial a_k} \quad , \tag{3･22･1}$$

$$\begin{aligned}\triangle\Lambda_a=&\sum_k\{v_k'(a)+\triangle C_k(a)\}\frac{\partial}{\partial a_k}\\&+\sum_k\sum_l\triangle\gamma_{kl}(a)\frac{\partial}{\partial a_l^*}\frac{\partial}{\partial a_k}\end{aligned} \quad , \tag{3･22･2}$$

のように二つの部分に分ける。ここで簡単の為に$\overset{0}{\gamma}_{kq}=\overset{0}{\gamma}_k\delta(k-q)$とした。$\overset{0}{\Lambda}_a$とMDHPとの間には固有直方程式

$$\overset{0}{\Lambda}_a H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n})=-\Gamma_n(p_1,\cdots,p_n)H_n(a_{p_1}\cdots a_{p_n}) \quad , \tag{3･23}$$

が成立することは容易に確かめられる。固有直$\Gamma_n(p_1,\cdots,p_n)$は

$$\Gamma_n(p_1,\cdots,p_n)=u_2(p_1)\overset{0}{\gamma}_{p_1}+u_2(p_2)\overset{0}{\gamma}_{p_2}+\cdots+u_2(p_n)\overset{0}{\gamma}_{p_n} \quad , \tag{3･24}$$

で与えられる。(3･23)は exact に成立するが，$\omega_{kq}(=\omega_k\delta(k-q))$が存在するときは，(3･22･1)に$\sum_k i\omega_k a_k\partial/\partial a_k$を加え，(3･23)で$\Gamma_n(p_1,\cdots,p_n)\to i\Omega(p_1,\cdots,p_n)-\Gamma_n(p_1,\cdots,p_n)$とおけばよい。ただしこのとき，$p_i+p_j\neq 0\ (i,j\in n)$である必要がある。又，

$$i\Omega_n(p_1,\cdots,p_n)=i\omega_{p_1}u_2(p_1)+\cdots+i\omega_{p_n}u_2(p_n) \quad ,$$

である。

§ 4.　いくつかの応用

この節では，前節で定義したMDHP を用いて二，三の応用を試みる。最初に，記憶関数の long time tail[(4),(10)]の問題へ適用する。次に，最初Halperin-Hahenberg-Ma

によって得られた，Kinetic Ising Model の特性振動数の critical exponent の Wilson 理論による補正を我々の方法で調べる。最後に，最近Mori[12] によって得られた dense gases および liguids に対する運動論的方程式に現われる臨界変数の射影部分の長波長部分へのくりこみ項で unknown とされていたくりこみ係数が explicit に得られる。ただし，実際の議論はスピン系で行なわれる.

(A) 記憶関数に対するn次のMDHPからの寄与

記憶関数の long time tail の問題は色々な人によって論じられているが，それらの議論は典型的に可逆的な二次の非線型項に対する二次摂動を用いて行なわれている。我々はこの議論を拡張し，高次の非線型項からは $t^{-d/2}$ より短かい tailしか生じないことを二次摂動の範囲で示す。簡単なスケーリングによって，$d \lesssim 6$ では，非線型の散逸項は streaming velocity に対して無視出来る[4]ので，(2•22)，(2•27)，(2•28) より，

$$\psi_k(t) \sim \langle v_k^{\prime *}(a) \exp[\, t(1-\mathscr{P}_a)\Lambda_a]\, v_k^{\prime}(a) \rangle \;, \qquad (4\cdot1)$$

を得る。ただし w(a) が Gaupian とみなされる程 T_c より上を考えている。十分大きな t を考えているので，例えば (4•1) の propagator をベキ展開したとするとき，高次のベキが (4•1) に dominant になるので，Λ_a の非線型項は (4•1) に対してはあまり重要でないだろうと予測できる。(4•1) の exp. の肩の Λ_a を $\overset{0}{\Lambda}_a$ で近似しよう。ここで，

$$\mathscr{P}_a H_n(a_{p_1} \cdots a_{p_n}) = \begin{cases} H_1(a_{p_1}) & \text{for } n=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \;,$$

なる関係と，固有直方程式 (3•23) を用いると，

$$\psi_k(t) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_n} D_n(k\,;k_1 \cdots k_n) \exp[-\Gamma_n(k_1 \cdots k_n)t] \;, \qquad (4\cdot2)$$

を得る。ここで D_n はすべて静的な帯磁率で書けていることから，小さな波数 $k_1, \cdots,$ k_n が変化する範囲では D_n は殆んど定数とし，

$$\Gamma_n(k_1 \cdots k_n) = \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{\overset{0}{\gamma}_{k_i}}{\chi(k_i)} \sim \sum_{i=1}^{n} \overset{0}{\gamma}_{k_i} \;,$$

と仮定する。又，力学量として保存量を考えると，

$$\gamma_k^0 \sim k^2 \quad ,$$

とする。(4・2)の積分を実行すると，n 次の MDHP からの記憶関数へのくりこみ項の時間依存性として，

$$\psi_k^{(n)}(t) \sim t^{-(n-1)d/2} \quad , \qquad (n \geq 2) \qquad (4\cdot3)$$

を得る。(4・3)は２次の非線型項が最も長い記憶効果を持つことを示し，今まで多くの人々によって得られた結果を支持している。

(B)　Kinetic Ising Model に対する critical index の Halperin-Hohenberg-Ma 補正[11]

Kinetic Ising のスピン変数は一成分であるから，streaming velocity は 0 となり，スピン変数の k 成分の運動方程式は，

$$\frac{d}{dt} S_k(t) = C_k(S(t)) + R_k(t) \quad , \qquad (4\cdot4)$$

と書ける。今，$T = T_c$ を考える。スピンの Fourier 変換を適当に行なうと，

$$w(s) \propto \exp\Big[-\frac{1}{2} \int_{0<|q|<1} u_2(q)\, s_q^* s_q$$

$$- u_4 \int_{0<|q_1|,\cdots,|q_4|<1} \int \delta(q_1 + \cdots + q_4)\, s_{q_1} \cdots s_{q_4} + O(\varepsilon^2) \Big] , \qquad (4\cdot5)$$

$$\int_{0<|q|<1} \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q \quad ,$$

ここで，

$$u_2(q) = q^2 + O(\varepsilon) \quad , \qquad \varepsilon = 4 - d \qquad (4\cdot6)$$

$$u_4 = O(\varepsilon) \quad ,$$

であり，(3・1) で表わされる $\Omega(k_1,\cdots,k_4)$ は local interaction として，その強さを u_4

とし，$|k_c|=1$ととった。(4・5)を用いると，

$$C_k(s)=\gamma_k^0\ \partial\ \ln w(s)/\partial s_k^* + O(\varepsilon^2)\quad , \tag{4・7}$$

は容易に求められる。ここで $\gamma_{kl}(s)$ の s 依存性は無視したが，s 依存性は ε^2 のオーダーできいてくる[9]ので $C_k(s)$ を ε のオーダーまで求めるときには必要ない。 streaming velocity はないので(2・22)，(2・26 − 28) の表式より線型の輸送係数に対して，

$$\varphi_k(i\omega)=[\gamma_k^0-\psi_k(i\omega)]/\langle|s_k|^2\rangle^{(4)}\quad , \tag{4・8}$$

$$\psi_k(i\omega)=\int_0^\infty dt\ e^{-i\omega t}\langle C_k^{\prime *}(s)\exp[\ t(1-\mathscr{P}_s)\Lambda_s]C_k'(s)\rangle\quad , \tag{4・9}$$

を得る。ここで，

$$C_k'(s)=-4u_4\gamma_k^0\iiint_{q_1q_2q_3}\frac{\delta(q_1+q_2+q_3)}{u_2(q_1)u_2(q_2)u_2(q_3)}\ H_3(s_{q_1}s_{q_2}s_{q_3})\ , \tag{4・10}$$

である。今 $\psi_k(i\omega)$ を $O(\varepsilon^2)$で求めているので，(4・9) で，

$$\exp[\ t(1-\mathscr{P}_s)\Lambda_s]\rightarrow\exp[\ t(1-\mathscr{P}_s)\Lambda_s^0]\ ,$$

としてよい。Λ_s^0 は(3・22・1) で与えられる。こういう状況のもとでは固有直方程式(3・23)が exact に成立する。最終的に $\psi_k(i\omega)$ は

$$\psi_k(i\omega)=6(4u_4)^2|\gamma_k^0|^2\iiint_{q_1q_2q_3}\frac{\delta(q_1+q_2+q_3)}{u_2(q_1)u_2(q_2)u_2(q_3)}$$

$$\times\frac{1}{i\omega+\gamma_{q_1}^0u_2(q_1)+\gamma_{q_2}^0u_2(q_2)+\gamma_{q_3}^0u_2(q_3)}+O(\varepsilon^2)\ , \tag{4・11}$$

で与えられる。(4・11) の積分から生じる ε 依存性は0，つまり 4 次元で積分する。実際(4・11)を求めると，$\omega=0$ に対して

$\gamma_k^0=\gamma^0$ (const.) のとき，

$$\psi_k(o)=-\lambda\ln k+O(\varepsilon^3)\ ,\quad \lambda=2u_4^2\frac{9}{8}\ln\frac{4}{3}\quad , \tag{4・12}$$

$\gamma_k^0 \sim k^2$ のとき，

$$\psi_k(o) = O \cdot \ln k + O(\varepsilon^3) \quad ,$$

となる。一方動的スケーリング則[13]により，

$$\varphi_k(i\omega) = k^z q\left(\frac{\omega}{k^z}\right) \quad , \qquad \varphi_k(o) \sim k^z \tag{4・13}$$

と書ける。εによるくりこみを考えない convetional theory では (4・8)の帯磁率から生じる $k^{2-\eta}$ より $z=2-\eta$ であるが，上に述べた議論からは $z=2+c\eta$と書くと，c は -1 からのずれがある。(4・18)，(4・13) で $\omega=0$ として (4・12) を用いて比較すると，

$$k^z = k^{2-\eta}(1+\lambda \ln k) \quad , \tag{4・14}$$

となり，$u_4 = 2\pi^2\varepsilon/9$，$\eta = \varepsilon^2/54$ を用いると，

$$c = 6\ln(4/3) - 1 \quad ,$$

を得る。この結果は，Halperin-Hohenberg-Ma，Suzuki-Igarashi，Kuramoto によって得られた結果と一致する。z のくりこみ項は系の total spin が保存されない場合にしか ε^2のオーダーではないことは上に述べた。

（C）座標空間における臨界変数の二つの分離について

ここでは最近Mori[12]によって得られた，dense gases と liquids に対する運動論的方程式で用いられた位相空間における密度の二つの分離，

$$\begin{aligned} n(p,r) &= A(p,r) + \widetilde{n(p,r)} \\ &= \alpha(p,r) + \triangle n(p,r) \quad , \end{aligned} \tag{4・15}$$

に対する一つの comment を行なう。簡単の為以下ではスピン系を例にとろう。μ成分のスピン密度の揺ぎ $\delta S^\mu(r;t) = S^\mu(r;t) - \langle S^\mu(r;t)\rangle$，を二つに分ける。

$$\delta S^\mu(r;t) = A^\mu(r;t) + \widetilde{\delta S^\mu(r;t)} \ , \tag{4・16}$$

ここで $A^\mu(r;t)$ は $\delta S^\mu(r;t)$ の長波長部分で，

$$A^{\mu}(r;t)=\int dr'\triangle(r-r')\delta S^{\mu}(r';t) \quad , \tag{4・17}$$

$$\triangle(r-r')\equiv\frac{1}{V}\sum_{q<k_c} \exp[-iq\cdot(r-r')] \quad ,$$

で与えられる。他の分離の仕方として，

$$\delta S^{\mu}(r;t)=\alpha^{\mu}(r;t)+\triangle\delta S^{\mu}(r;t) \quad ,$$

がある。ここで，

$$\alpha^{\mu}(r;t)\equiv\wp\delta S^{\mu}(r;t)\simeq<\delta S^{\mu}(r;o);A(t)> \quad , \tag{4・19}$$

である。最後の近似を一般化されたBogolubov 近似と呼ぼう。Mori [12] によると，

$$\alpha^{\mu}(r;t)\cong A^{\mu}(r;t)+\frac{1}{2}\sum_{\nu_1}\sum_{\nu_2}\iint dr_1dr_2\beta(\mu;\nu_1\nu_2|\,r-r_1,r-r_2)$$
$$\times[A^{\nu_1}(r_1;t_1)A^{\nu_2}(r_2;t_2)-<A^{\nu_1}(r_1;t_1)A^{\nu_2}(r_2;t_2)>] \quad , \tag{4・20}$$

と展開できる。ここで(4・20)の第二項は，射影部分への長波長部分からのくりこみである。Hermite多項式を用いてくりこみ係数 $\beta(\mu;\nu_1\nu_2|\,r_1,r_2)$ を explicit に求めることができる。 $w(a)=w_0(a)$ としよう。手続きは(4・19)にデルタ関数のHermite 展開(3・15)を用いればよい。結果のみ書くと， unknown parameter β は

$$\beta(\mu;\nu_1\nu_2|\,r-r_1,r-r_2)$$
$$=\frac{1}{V}\sum_{k_1,}\sum_{k_2<k_c}\beta(\mu;\nu_1\nu_2|\,k_1,k_2)\exp[-ik_1\cdot(r-r_1)$$
$$-ik_2\cdot(r-r_2)]\,\Theta(|k_1+k_2|-k_c) \tag{4・21}$$

$$\beta(\mu;\nu_1\nu_2|\,k_1,k_2)\equiv<\delta S^{\mu}_{k_1+k_2}(o)H_2(A^{\nu_1}_{k_1}(o)A^{\nu_2}_{k_2}(o))> \quad ,$$

$$\Theta(x)=\begin{cases}1 \quad , & \text{for } x\geq 0\\ 0 \quad , & \text{otherwise} \quad ,\end{cases}$$

で与えられる。(長波長)+(長波長)→(短波長)の過程がひんぱんにおこるαは長

波長部分からのずれが大きくなる。又，表式(4・21)，(4・22)より容易に，

$$A^{\mu}(r;t)=\int dr'\triangle(r-r')\alpha^{\mu}(r';t)$$

が証明できる。

§5. 結　び

§1.で述べたように，確率場のWiener展開は乱流理論ではひんぱんに用いられるが，非線型動力学での試みはなされていない。この小稿では，新しい試みとしてHermite多項式展開を述べたが，乱流理論の場合と比べて著しい相違があることがわかる。乱流理論では，力学量である速度場を他の標準正規関数である確率変数で展開するのに比べ，ここで述べたことはstreaming velocity, dissipative term を力学量の非線型項で展開するというものであり，その意味で，二つの取扱いは大いに異なる。これは，乱流理論の速度場がwell-defined な量でないのに対し，非線型動力学では力学量(例えば spin density)がwell-definedな量であることに対応して生じた相違とみることが出来る。

動的臨界現象の問題に関しては，前に述べたように非線型項を二次でとめる根拠はないのであるが，現実的には，川崎理論は二次までとり，実験とよく合う結果を得ている。[2] 三次以上は irrelevant term になっているのかも知れないがはっきりしない。H-H-M補正を導くときは，H-H-M, Suzuki-Igarashi が用いたTDGL(非線型Langevin方程式)を用いて議論したが，この方法ではzの ε^3 の補正を求めることは出来ない。最近Kuramoto[11]はWilsonをKinetic Ising の場合に拡張して同じ結果を得ている。蔵本理論では ε^3 の補正を求めることは可能である。最後に，(3・8)で定義される生成，消滅演算子を用いて今までの議論を第二量子化の形に書きかえることは可能である。

この小稿を書くにあたり，色々議論をしていただいた蔵本由紀，肱黒長憲，重松秀登の各氏に感謝します。

文　　献

(1) K. G. Wilson, Phys. Rev. B4 (1971), 3174.
K. G. Wilson, Phys. Rev. B4 (1971), 3184.
K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Lett. (in press).

(2) M. Fixman, Advances in Chemical Physics Vol, Ⅵ (1964).
L. P. Kadanoff and J. Swift, Phys. Rev. 166 (1968), 89.
K. Kawasaki, Ann. Phys. 61 (1970), 1.

(3) H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965), 423.

(4) H. Mori and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 49 (1973), 764.
森　肇，1973年度物性若手夏の学校講義ノート

(5) 例えば，日本物理学会誌（第28巻第7号，1973年）に中沢宏氏の明解な解説が載っているので参照されたい。

(6) R. Zwanzig, Proceedings of the Sixth IUPAP Conference on Statistical Mechanics (Univ. Chicago Press, 1972)
K. Kawasaki, Proceedings of the International Symposium on Synergetics, ed. H. Haken (B. G. Teubner, Stuttgart, 1973), 35.

(7) R. Zwanzig, Phys. Rev. 124 (1961), 983.

(8) H. Mori, H. Fujisaka and H. Shigematsu, Prog. Theor. Phys. 51 (1974), No. 1.

(9) Y. Kuramoto, private communication.

(10) J. R. Dorfman and E. G. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. 25 (1970), 1257.
K. Kawasaki, Phys. Lett. 34A (1971), 12.
K. Pomeau, Phys. Rev. A3 (1971), 1174.

(11) B.I. Halperin, P.C. Hohenberg and S. Ma, Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 1548
M. Suzuki and G. Igarashi, Prog. Theoret. Phys. 49 (1073), 1070
Y. Kuramoto, to be published.

(12) H. Mori, Prog. Theor. Phys. 49 (1973), 1516.

(13) B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. 177 (1969), 952.